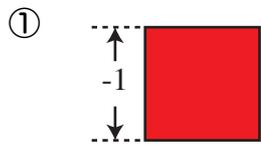
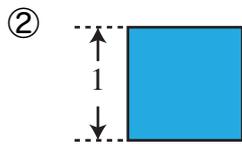


たてとよこの長さは

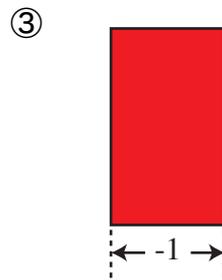
つぎの各長方形のたてまたはよこ、あるいは両方の長さを求めてください。



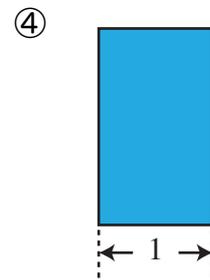
よこの長さ



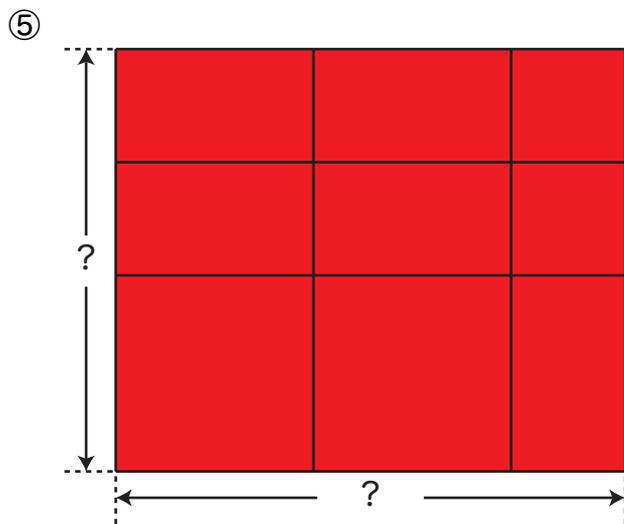
よこの長さ



たての長さ

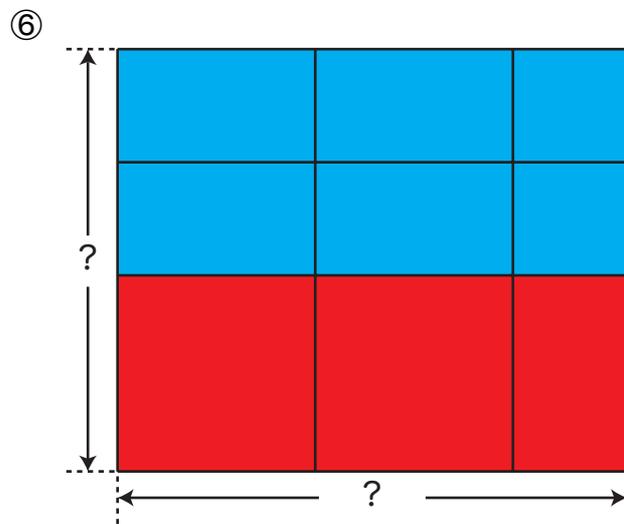


たての長さ



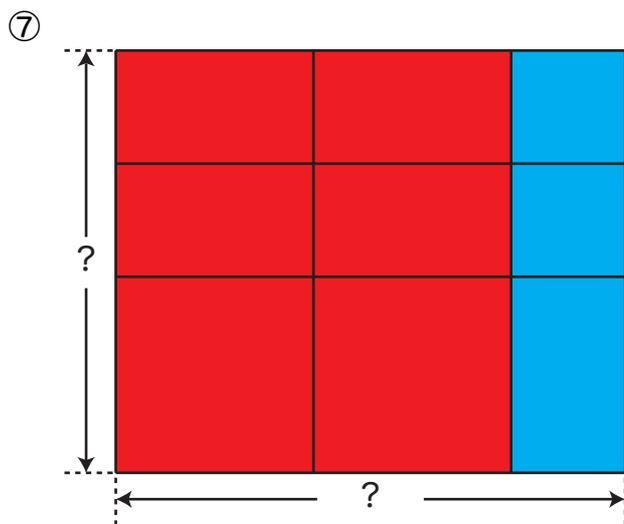
たての長さ

よこの長さ



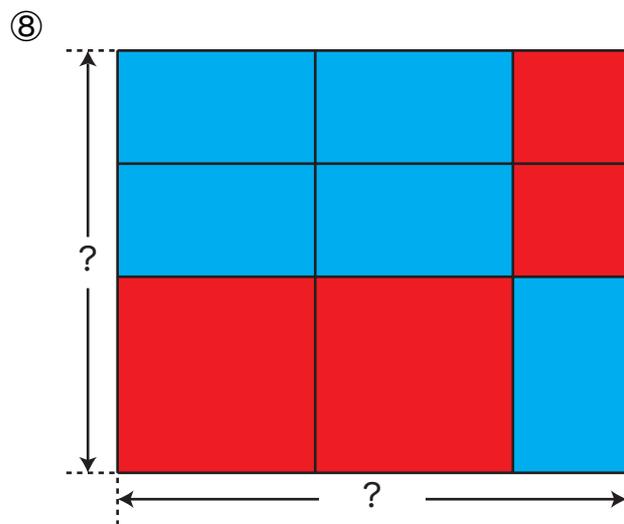
たての長さ

よこの長さ



たての長さ

よこの長さ



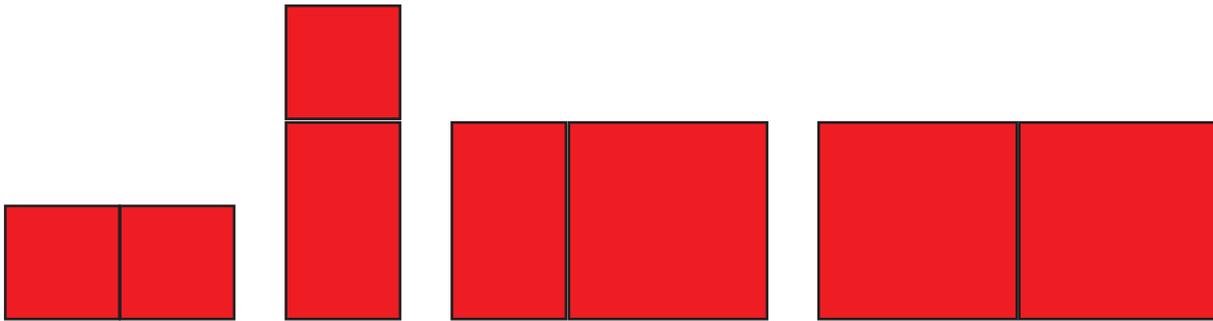
たての長さ

よこの長さ

長方形に並べる

まず、 $2x^2 + 7x + 6$ のタイルを用意してください。

つぎに、これら全部を使って大きな1つの長方形に並べてください。
 このとき注意をするのは、同じ長さ同士しかつなげられないということです。
 もちろん、 x の長さは決まっていないからです。
 つまり下のように、辺の長さが1同士か、辺の長さが x 同士です。



並べたら、その様子を図に書いてください。

たてとよこの長さはどうなっていますか。

たての長さは よこの長さは
 初めの面積の合計と長方形に並べた面積は変わりませんから

$$2x^2 + 7x + 6 = (\quad) (\quad)$$

となります。これを「因数分解」といいます。
 つまり、「文字式を積の形に直すこと」です。

では、 $3x^2 + 10x + 3$ を長方形に並べ、図に書いてください。

たての長さは よこの長さは
 だから $3x^2 + 10x + 3 = (\quad) (\quad)$

ベキタイルで因数分解

つぎの式を、ベキタイルを使って因数分解をしてください。図も書きましょう。

① $2x^2 + 3x + 1$

たての長さは

よこの長さは

② $3x^2 + 4x + 1$

たての長さは

よこの長さは

③ $2x^2 + 5x + 2$

たての長さは

よこの長さは

④ $3x^2 + 11x + 6$

たての長さは

よこの長さは

ベキタイルの並べ方

ここで長方形の並べ方についてまとめておきましょう。

1. 並べ方により形の違う長方形はできましたか？
2. 並べ方の特徴はどうでしょうか。
3. どういう順に並べたら早く正確に並べられるでしょうか。

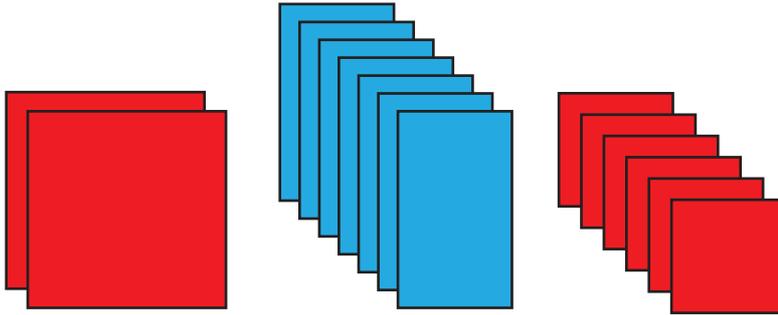
まず()タイルを並べます

つぎに()タイルを並べます

最後に()タイルを並べます

負タイルを使う

まず、 x^2 タイル2枚、 $-x$ タイルを7枚、1タイルを6枚用意してください。



これらを全部使って1つの大きな長方形を作って下さい。図を書いて下さい。

たての長さは

よこの長さは

だから $2x^2 - 7x + 6 = (\quad) (\quad)$ と因数分解できます。

<やってみよう>

つぎの式を因数分解してください。できたら図を書いてください。

$$3x^2 - 4x + 1$$

たての長さは

よこの長さは

$$x^2 - x - 2$$

たての長さは

よこの長さは

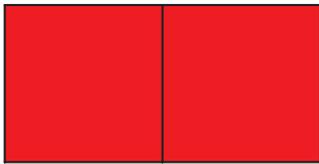
ベキタイルの並べ方

ベキタイルを長方形に並べる仕方についてまとめましょう。

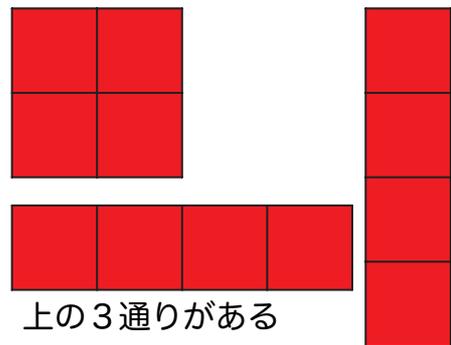
1. x^2 タイルだけで、長方形または正方形に並べる。
2. 1タイルだけで、長方形または正方形に並べる。
ただし、 x^2 タイルと1タイルは対角線に並べ隣には並べない。
3. x タイルを並べ、全体として長方形または正方形を作る。
このとき長方形がうまくできなければ、1タイルや x^2 タイルの並べ方を変えてやり直す。
4. キャンセルタイルは、1タイルが負のときに必要になる。

$2x^2 + 9x + 4$ でやってみよう

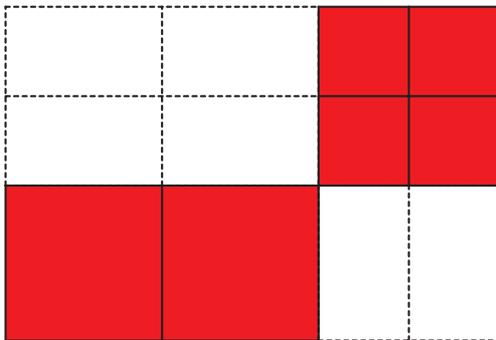
① x^2 タイルを長方形に並べる



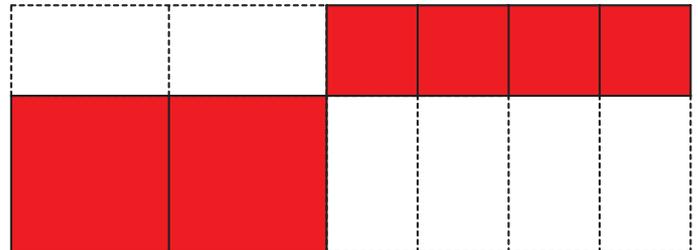
② 1タイルを長方形に並べる



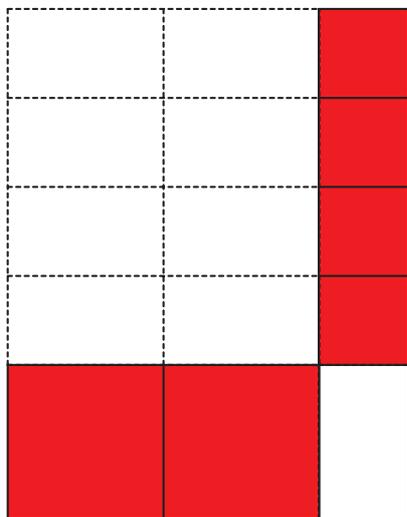
③ x タイルを2カ所に並べる



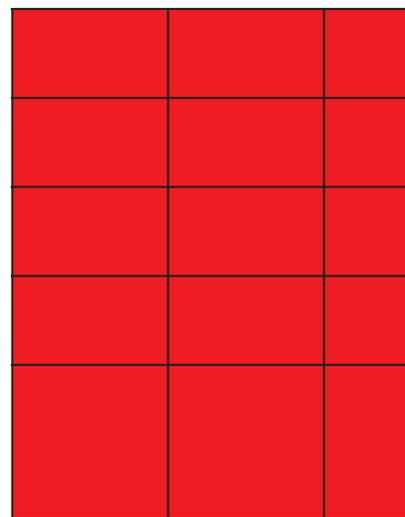
6枚しか使わないので3枚余る



これも6枚しか使わないので3枚余る



ちょうど9枚使うのでOK



$$2x^2 + 9x + 4 = (x + 4)(2x + 1)$$

やってみよう

ベキタイルを使って因数分解をしてください。できたら図を書いてください。

① $3x^2 - 10x + 3$

② $3x^2 - 4x + 1$

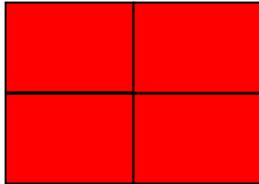
③ $3x^2 - 4x - 4$

④ $6x^2 + x - 1$

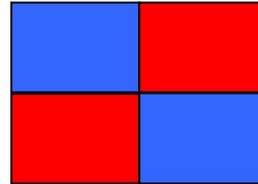
忍法田の字

ベキタイルを使って長方形に並べ因数分解すると、つぎの4通りの「田」の字に並びます。これを「忍法田の字」といいます。

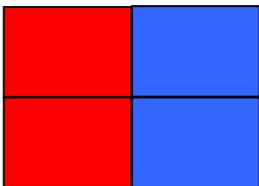
① $3x^2 + 8x + 4$ のタイプ



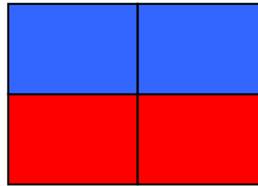
② $3x^2 - 8x + 4$ のタイプ



③ $3x^2 + 4x - 4$ のタイプ



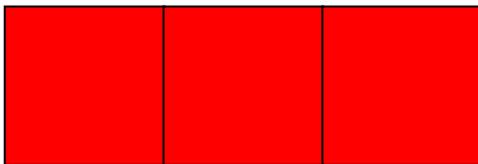
④ $3x^2 - 4x - 4$ のタイプ



【ベキタイルから忍法田の字へ】

では $3x^2 + 8x + 4$ を忍法田の字で因数分解をしてみましょう

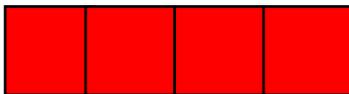
1. x^2 タイルが3枚ですので、たてに1枚よこに3枚並べる



1	$3x^2$	
	3	

2. 1タイルが4枚ありますので

① たてに1枚よこに4枚



+1	$+1 \times 3$	+4
1	$3x^2$	$+1 \times 4$
	3	+4

x タイルの数は
 $1 \times 3 + 1 \times 4 = 7$ 枚なので ×

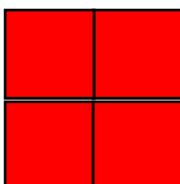
② たてに4枚よこに1枚



+4	$+4 \times 3$	+4
1	$3x^2$	$+1 \times 1$
	3	+1

x タイルの数は
 $4 \times 3 + 1 \times 1 = 13$ 枚なので ×

③ たてに2枚よこに2枚



+2	$+2 \times 3$	+4
1	$3x^2$	$+2 \times 1$
	3	+2

x タイルの数は
 $2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$ 枚なので ○

$$3x^2 + 8x + 4 = (x + 2)(3x + 2)$$

やってみよう

つぎの式を「忍法田の字」で因数分解をしてください。

① $2x^2 + 5x + 3$

② $3x^2 - 7x + 2$

③ $x^2 + 6x + 8$

④ $6x^2 + 5x - 6$

やってみよう その2

つぎの式を「忍法田の字」で因数分解をしてください。

① $3x^2 - 5x + 2$

② $4x^2 + 4x + 1$

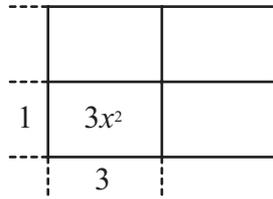
③ $4x^2 + 4x - 3$

④ $4x^2 - 1$

忍法田の字からタスキがけ法へ

では再度 $3x^2 + 8x + 4$ でやってみます

1. x^2 タイルが3枚ですので、たてに1枚よこに3枚並べる



3

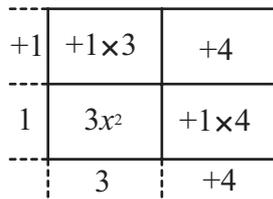
たて 1

よこ 3

x^2 タイルを長方形に並べる

2. 1タイルが4枚ありますので

① たてに1枚よこに4枚



3

4

たて 1

1



よこ 3

4

1タイルを長方形に並べる

3

4

たて 1

1

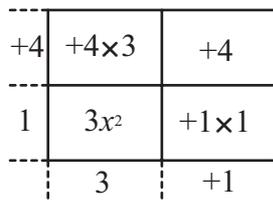
$= 3$

よこ 3

$= \frac{4}{7}$

あわないのでダメ

② たてに4枚よこに1枚



3

4

たて 1

4



よこ 3

1

1タイルを長方形に並べる

3

4

たて 1

4

$= 12$

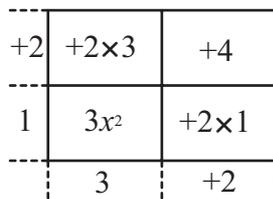
よこ 3

1

$= \frac{1}{13}$

あわないのでダメ

③ たてに2枚よこに2枚



3

4

たて 1

2



よこ 3

2

1タイルを長方形に並べる

3

4

たて 1

2

$= 6$

よこ 3

2

$= \frac{2}{8}$



3

4

たて

$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = 6$

よこ

$= \frac{2}{8}$

8

たて $x+2$ よこ $3x+2$

したがって $3x^2 + 8x + 4 = (x+2)(3x+2)$

やってみよう

つぎの式をタスキかけ法で因数分解をしてください。

① $2x^2 - 3x + 1$

② $3x^2 - 7x + 4$

③ $3x^2 - 8x + 4$

④ $3x^2 - x - 4$

⑤ $3x^2 - 5x - 2$

⑥ $5x^2 + 7x - 6$

⑦ $6x^2 - 5x - 6$

⑧ $x^2 + 6x + 8$

⑨ $x^2 - 2x - 8$

⑩ $x^2 + 3x - 10$

どんな二次式もできるよ

さて、二次式では $4x^2 - 9$ とか $3x^2 + 6x$ のように全部の項がそろっていない式もありますね。でも心配入りません。「忍法田の字」そして「タスキがけ法」を使えば必ずできます。

さて、 $4x^2 - 9$ をやってみましょう。

x^2 タイルは4枚、 x タイルは0枚、 -1 タイルは9枚あります。

つまり x タイルはキャンセルされてなくなっていることに気をつけましょう。

$$4 \quad -9$$

$$\begin{array}{l} \text{たて} \quad \boxed{2 \quad 3} = 6 \\ \text{よこ} \quad \boxed{2 \quad -3} = \frac{-6}{0} \end{array}$$

したがって $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$

さて、 $3x^2 + 6x$ をやってみましょう。

x^2 タイルは3枚、 x タイルは6枚、 1 タイルは0枚あります。

つまり 1 タイルはないことに気をつけましょう。

$$3 \quad 0$$

$$\begin{array}{l} \text{たて} \quad \boxed{1 \quad 2} = 6 \\ \text{よこ} \quad \boxed{3 \quad 0} = \frac{0}{6} \end{array}$$

$$3 \quad 0$$

$$\begin{array}{l} \text{たて} \quad \boxed{1 \quad 0} = 0 \\ \text{よこ} \quad \boxed{3 \quad 6} = \frac{6}{6} \end{array}$$

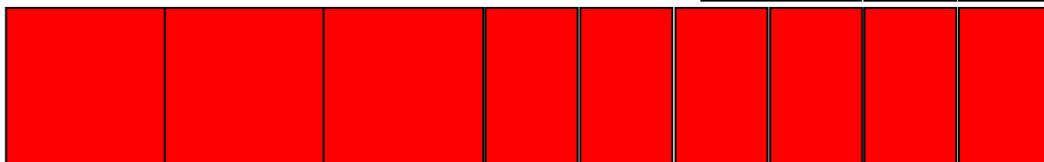
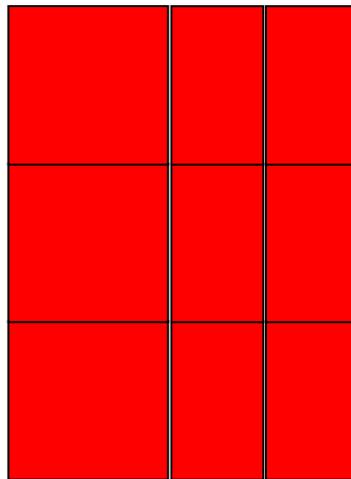
したがって $3x^2 + 6x = (x+3)(3x+0) = 3x(x+1)$ か $3x^2 + 6x = (x+0)(3x+6) = x(3x+6)$ となります。

教科書等では答えは初めのように書いてありますが、どちらでもかまいません。

ベキタイルだと、右や下のようにならべたわけです。

このような因数分解を「共通因数でくくる」と言います。

因数は文字ですので、数字までくり出さなくてもいいわけです。



タスキがけ法で解けるよ

$8x^2 - 26xy + 15y^2$ をタスキがけ法で因数分解を試みよう。
 x^2 タイルは8枚、 x タイルは $-26y$ 枚、 1 タイルは $15y^2$ 枚あります。

$$8 \quad 15y^2$$

たて

2	-5y
---	-----

 = $-20y$

よこ

4	-3y
---	-----

 = $\underline{-6y}$
 $-26y$

したがって $8x^2 - 26xy + 15y^2 = (2x - 5y)(4x - 3y)$

つぎの式をタスキがけ法で因数分解してください。

① $2x^2 - 5xy - 3y^2$

② $7x^2 + 11xy + 4y^2$

③ $3x^2 - 4xy - 4y^2$

④ $12x^2 - xy - 6y^2$

⑤ $35x^2 + 16xy - 12y^2$

⑥ $x^2 - 4xy + 4y^2$

⑦ $9x^2 - 4y^2$

⑧ $2x^2 + 4xy$

これも忍法田の字でできる

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 5x - y - 3$ を忍法田の字で因数分解してみましょう。

ここで、 x^2 タイルが $2x^2 + 5xy + 2y^2$ 枚、 x タイルが $(-5x - y)$ 枚、 -1 タイルが3枚
つまり、 $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 5x - y - 3 = (2x^2 + 5xy + 2y^2) + (-5x - y) - 3$ と考えます。

まず x^2 タイルが $2x^2 + 5xy + 2y^2$ 枚を長方形に並べます。つまり因数分解します。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2y \\ \hline 2 & y \\ \hline \end{array} 2y^2$$

たて $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2y \\ \hline 2 & y \\ \hline \end{array} = 4y$
 よこ $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2y \\ \hline 2 & y \\ \hline \end{array} = \frac{y}{5y}$

		-3
$x+2y$	$2x^2 + 5xy + 2y^2$	
	$2x+y$	

よって $2y^2 + 5xy + 2y^2 = (y+2y)(2y+1)$

だから、たて $(x+2y)$ 、よこ $(2x+y)$ の長方形

-1 タイルを並べて、 x タイルの数になる組合せを探します。

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 3$

たて $x+2y \quad -3 = -6x-3y$
 よこ $2x+y \quad \times \quad 1 = \frac{x+2y}{-5x-y}$

-3	$-6x - 3y$	-3
$x+2y$	$2x^2 + 5xy + 2y^2$	$x+2y$
	$2x+y$	1

したがって $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 5x - y - 3 = (x+2y-3)(2x+y+1)$

つぎの式をタスキがけ法で因数分解してください。

① $x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 7y + 6$

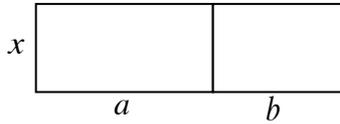
② $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x + 5y - 2$

1 次式の因数分解

今までは2次式の因数分解でした。ここでは1次式の因数分解について考えます。

$ax + bx$ は x についての1次式です。

ax は、たて x よこ a の長方形です。同様に bx は、たて x よこ b の長方形です。



長方形を作ると上のようになります。したがって、 $ax + bx = x(a + b)$ となります。

これを「共通因数をくくりだす」といいます。

たとえば

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

<共通因数をくくり出す>

つぎの式を因数分解してください。

① $x^2y - xy^2$

② $p^2q + pq^2 - pqr$

③ $a^3b^2 - a^2b^3 + a^2b^2c$

<こんな使い方も>

$a^3 - ab^2 - b^2c + a^2c$ を因数分解してみます。

文字 a については3次式、文字 b については2次式、文字 c については1次式です。

最も次数の低い文字について整理するのがポイントです。

ではやってみましょう

$$a^3 - ab^2 - b^2c + a^2c = c(a^2 - b^2) + (a^3 - ab^2) \quad \dots \text{文字 } c \text{ について整理するため、} c \text{ でくくり出します}$$

$$= c(a^2 - b^2) + a(a^2 - b^2) \quad \dots \text{後ろの項は共通因数 } a \text{ をくくり出します}$$

$$= (a^2 - b^2)(c + a) \quad \dots \text{共通因数 } a^2 - b^2 \text{ をくくり出します}$$

$$= (a + b)(a - b)(c + a) \quad \dots \text{前の因数をさらに因数分解します}$$

<やってみよう>

① $4xy^2 - 4y^2 - x + 1$

② $a^3 - 9ab^2 + a^2c - 9b^2c$

